

Leçon 149 : Déterminant. Exemples et applications

Références : Courdon, Grifone
(Alg. et Ana)

I - Notion de déterminant

- 1) Formes multilinéaires
- 2) Déterminant d'une famille de vecteurs
- 3) Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice carrée
- 4) Propriétés analytiques

II - Calcul pratique d'un déterminant

- 1) Pivot de Gauss
- 2) Développement selon une ligne ou une colonne
- 3) Déterminants circulants

III - Applications du déterminant

- 1) En algèbre linéaire
- 2) En géométrie

DEV 1 : Différentielle du $\det$ et éléments de $GL_n(\mathbb{R})$ de norme minimale

DEV 2 : Matrice de Gram et inégalités d'Hadamard

Leçon 14.9: Déterminant. Exemples et applications

Soit K un corps et E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

I - Notion de déterminant

1) Famille multi-linéaire [G.O.V.]
DEF 1: Soient $E_1, \dots, E_p, F$ des K -espaces vectoriels. Une application $f: E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ est dite p -linéaire lorsque en tout point les p applications partielles sont linéaires. L'ensemble de ces applications est noté $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_p, F)$. C'est un K -espace vectoriel. Si $E_1 = \dots = E_p = E$ et $F = K$, on parle de forme p -linéaire sur E et on note $\mathcal{L}_p(E, K)$.

EX 2: $E^* \times E \rightarrow K$ est une forme bilinéaire
 $(\varphi, x) \mapsto \varphi(x)$
 Si $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$ $E^p \rightarrow K$ est une forme p -linéaire
 $(x_1, \dots, x_p) \mapsto \varphi_1(x_1) \dots \varphi_p(x_p)$ sur E .

PROP 3: $\dim(\mathcal{L}_p(E, K)) = (\dim(E))^p$.

DEF 4: Soit $f \in \mathcal{L}_p(E, K)$. On dit que f est alternée lorsque $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ dès que deux vecteurs parmi les x_i sont égaux. On dit que f est antisymétrique lorsque l'échange de deux vecteurs dans la suite $(x_1, \dots, x_p)$ donne à f des valeurs opposées.

PROP 5: f est antisymétrique si et seulement si pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_p$ et pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, on a :
 $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \epsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p)$

THM 6: Si $\text{car}(K) \neq 2$ et $f \in \mathcal{L}_p(E, K)$, alors, f est alternée si et seulement si f est antisymétrique.

PROP 7: Soit $f \in \mathcal{L}_p(E, K)$ alternée. Si $(x_1, \dots, x_p)$ est liée, alors $f(x_1, \dots, x_p) = 0$.

COR 8: Soit $f \in \mathcal{L}_p(E, K)$ alternée. On ne change pas la valeur de $f(x_1, \dots, x_p)$ en ajoutant à un des vecteurs x_i une combinaison linéaire des autres vecteurs.

2) Déterminant d'une famille de vecteurs [G.O.V.]
 $n = \dim(E)$

THM 9: L'ensemble des formes n -linéaires alternées sur E forme une droite vectorielle. De plus, il existe une et une seule forme n -linéaire alternée prenant la valeur 1 sur une base donnée de E .

DEF 10: Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On appelle déterminant dans la base B et on note $\det_B$ l'unique forme n -linéaire alternée qui vaut 1 sur B .

PROP 11: Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} e_j$, alors :

$$\det_B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) x_{1, \sigma(1)} \dots x_{n, \sigma(n)}$$

EX 12: Si $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, alors $\det(x, y) = ad - bc$.

PROP 13: Soit B et B' sont deux bases de E , alors pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$\det_{B'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{B'}(B) \det_B(x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{D'où } \det_{B'}(B) \det_B(B') = 1$$

THM 14: Soient $x_1, \dots, x_n \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(x_1, \dots, x_n)$ est liée

(ii) Pour toute base B de E , $\det_B(x_1, \dots, x_n) = 0$

(iii) Il existe une base B de E telle que $\det_B(x_1, \dots, x_n) = 0$

COR 15: $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si son déterminant dans une ou toute base de E est non nul.

3) Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice [G.O.V.]

PROP 16: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Le scalaire $\det_B(f(e_1), \dots, f(e_n))$ ne dépend pas de la base choisie. On l'appelle déterminant de f et on le note $\det(f)$.

PROP 17: (i) Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$

(ii) $\det(\text{Id}_E) = 1$

(iii) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors: $f \in \text{GL}(E) \Leftrightarrow \det(f) \neq 0$ et on a

$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$$

DEF 18: Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$. On appelle déterminant de A et on note $\det(A)$ le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de K^n . On a :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

REM 19: On note aussi le déterminant de A en écrivant

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

PROP 20: Soit $A \in M_n(K)$. Alors:

- (1) $\det(A) = \det(A^t)$ (2) $\det(A)$ dépend linéairement des colonnes (resp. des lignes) de A
 - (3) Pour tout $\lambda \in K$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
 - (4) $\det(A) \neq 0 \iff A \in GL_n(K)$
 - (5) Si on effectue une permutation $\sigma \in S_n$ sur les colonnes (ou les lignes) de A , $\det(A)$ est multiplié par $\epsilon(\sigma)$.
 - (6) Si A est triangulaire, $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$
 - (7) On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.
 - (8) Si A est la matrice de $f \in \mathcal{L}(E)$ dans une base de E , alors $\det(A) = \det(f)$.
 - (9) Si $A, B \in M_n(K)$, $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
 - (10) Deux matrices semblables ont même déterminant
- DEF 21:** Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$. Pour tout (i, j) , on appelle mineur de a_{ij} le déterminant Δ_{ij} obtenu en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de A . Le scalaire $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ s'appelle le cofacteur de a_{ij} . La matrice $(A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ des cofacteurs des éléments de A s'appelle la comatrice de A notée $\text{com}(A)$.

4) Propriétés analytiques [Calc. Analyse]

DEV 1

PROP 22: L'application $M \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(M)$ est de classe C^∞ et $\forall M, H \in GL_n(\mathbb{R})$, $d(\det)(M)(H) = \text{tr}(\text{com}(M)H)$

THM 23: On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|M\|_2 = \left(\sum m_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales directes est l'ensemble des éléments de $GL_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

PROP 24: $GL_n(K)$ est ouvert dense dans $M_n(K)$

II - Calcul pratique d'un déterminant

1) Pivots de Gauss

METHODE 25: Pour calculer le déterminant de $A \in M_n(K)$, on peut transformer A en une matrice triangulaire par des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes:

- La transvection ($C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$) ne change pas le déterminant
- La dilatation ($C_i \leftarrow \lambda C_i$) ($\lambda \neq 0$) multiplie le det par λ
- La permutation ($C_i \leftrightarrow C_j$) change le signe du déterminant

EX 26: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ en effectuant l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$.

2) Développement selon une ligne ou une colonne [GRI]

PROP 27: (Développement selon une ligne ou une colonne) Soit $A \in M_n(K)$, A_{ij} les cofacteurs des éléments de A . Alors:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

EX 28: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Alors:

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 - 6 + 10 = 1$$

PROP 29: Soit $A \in M_n(K)$. Alors $A^t \text{com}(A) = \text{com}(A)A = \det(A)I_n$

En particulier, si $A \in GL_n(K)$, alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{com}(A)$.

EX 30: Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$ est inversible, alors:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3) Déterminants remarquables [GRI]

PROP 31: (Déterminant par blocs) Soit $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_n(K)$

avec $A \in M_p(K)$ et $B \in M_{n-p}(K)$, alors $\det(M) = \det(A) \det(B)$

THM 32: (Vandermonde) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$, soient $a_1, \dots, a_m$ des scalaires de K . On note $V(a_1, \dots, a_m) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{m-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_m & a_m^2 & \dots & a_m^{m-1} \end{vmatrix}$

$$\text{Alors } V(a_1, \dots, a_m) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (a_j - a_i)$$

COR 33: Soit $m \geq 2$. Pour tout $f \in \mathcal{P}_{m-1}$, on considère

$P_k = X^k + a_{k,1}X^{k-1} + \dots + a_{k,k} \in \mathbb{R}[X]$. Soit $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & P_1(x_1) & \dots & P_{m-1}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & P_1(x_m) & \dots & P_{m-1}(x_m) \end{vmatrix}$$

est égal à $V(x_1, \dots, x_m)$.

PROP 34: (Cauchy) Soient $a_1, \dots, a_n \in K$ et $b_1, \dots, b_n \in K$ tels que pour tout (i, j) , $a_i + b_j \neq 0$. Alors:

$$\det \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \frac{\prod_{i=1}^n (a_i - a_i) \prod_{j=1}^n (b_j - b_j)}{\prod_{i,j} (a_i + b_j)}$$

III - Applications du déterminant

1) En algèbre linéaire [GRI]

DEF 35: On appelle mineur d'ordre r de $A \in M_n(K)$ le déterminant d'une matrice d'ordre r extraite de A en choisissant r lignes et r colonnes.

THM 36 Soient $v_1, \dots, v_n \in K^n$ et A la matrice de $(v_1, \dots, v_n)$ dans la base canonique de K^n . Alors $(v_1, \dots, v_n)$ est libre si et seulement si on peut extraire de A un mineur d'ordre n non nul.

THM 37 Le rang d'une matrice A est l'ordre maximal des mineurs non nuls extraits de A .

EX 38 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\text{rg}(A) = 2$.

DEF 39 On appelle système de Cramer un système linéaire dont la matrice A est carrée et inversible.

THM 40 (Cramer) Un système de Cramer admet une et une seule solution donnée par $(x_1, \dots, x_n)$ avec $x_i = \frac{\det(c_1, \dots, c_{i-1}, b, c_{i+1}, \dots, c_n)}{\det(A)}$ où le système est $Ax = b$ avec $A \in GL_n(K)$ et $c_1, \dots, c_n$ sont les colonnes de A .

EX 41 Le système $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 5 \end{cases}$ a pour unique solution $(5, 1, 1)$.

DEF 42 Soit $A \in M_n(K)$. On appelle polynôme caractéristique de A et on note χ_A le polynôme $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.

PROP 43 Les racines de χ_A sont les valeurs propres de A .

PROP 44 $A \in M_n(K)$ est trigonalisable si et seulement si χ_A est scindé dans K .

PROP 45 Si χ_A est scindé à racines simples, alors A est diagonalisable.

PROP 46 Si F est un sev de E stable par $A \in \mathcal{L}(E)$, alors $\chi_{A|_F} \mid \chi_A$.

EX 47 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $\chi_A(X) = X(X-1)(X-2)$ donc A est diagonalisable.

PROP 48 Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. De plus, si $A \in M_n(K)$, $\chi_A = \chi_{A^t}$.

2) En géométrie [GRI] Ici, $K = \mathbb{R}$.

THM 49 Soient $v, w \in \mathbb{R}^2$. L'aire $\mathcal{A}(v, w)$ du parallélogramme engendré par v, w est $|\det(v, w)|$.

THM 50 Soient $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Le volume du parallépipède engendré par $(v_1, \dots, v_n)$ est $|\det(v_1, \dots, v_n)|$.

DEF 51 Soient B, B' deux bases de E . On dit que B et B' ont la même orientation lorsque $\det_B(B') > 0$.

PROP 52 La relation "avoir la même orientation" est une relation d'équivalence. Se donner une orientation de E revient à se donner une base B de E .

DEF 53 Si E est orienté, les bases de E ayant la même orientation que B sont dites directes, les autres sont dites indirectes.

PROP 54 Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est euclidien et orienté par B une base orthonormée, le déterminant de $(v_1, \dots, v_m) \in E^m$ ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie. On l'appelle produit mixte et on le note $[v_1, \dots, v_m]$.

PROP 55 Soient $a, b \in \mathbb{R}^3$. L'application $x \mapsto \det(a, b, x)$ est une forme linéaire donc est représentée par un unique vecteur noté $a \wedge b$ appelé produit vectoriel de a et b . Il est défini par: $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\det(a, b, x) = \langle a \wedge b, x \rangle$.

DEF 56 So $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est euclidien, on appelle matrice de Gram associée à $(v_1, \dots, v_p)$ la matrice $(\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p}$. On note $G(v_1, \dots, v_p)$ son déterminant.

PROP 57 $G(v_1, \dots, v_p) \geq 0$ et $G(v_1, \dots, v_p) \neq 0$ si et seulement si $(v_1, \dots, v_p)$ est libre.

DEV 2

PROP 58 Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille libre, $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ et $x \in E$. Alors

$$d(x, F)^2 = \frac{G(x, v_1, \dots, v_p)}{G(v_1, \dots, v_p)}$$

PROP 59 (Inégalité d'Hadamard) Soit $(v_1, \dots, v_m) \in E^m$.

$$G(v_1, \dots, v_m) \leq \prod_{i=1}^m \|v_i\|^2$$

[GOV]

$$\text{Si } E = K^n, \text{ alors } |\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \prod_{i=1}^n \|v_i\|_2$$

On a égalité si et seulement si l'un des v_i est nul ou $(v_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ est orthogonale.

APPLI 60 Dans $\mathbb{R}^3$, le volume du parallépipède engendré par $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ est majoré par le volume du pavé délimité $\|u\|_2 \|v\|_2 \|w\|_2$.